531. D'Amore B. (2005). L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*. 4, 481-500.

L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya)[1]

Bruno D'Amore

NRD - Dipartimento di Matematica – Università di Bologna
ASP – Alta Scuola Pedagogica - Locarno
MESCUD – Università Distrettuale Fr. José de Caldas – Bogotà

Lavoro eseguito nell'àmbito del Programma di Ricerca 60% dell'Università di Bologna (Dipartimento di Matematica): «*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*».

Summary. We introduce the characteristics of Nyaya, a strongly empiric logic that opposed Buddhism in the first centuries D.C. We show through examples realized in senior classes (14-15 years old students) how, in spontaneous situations, student's argumentative - demonstrative behaviour is sometimes empirically closer to the Nyaya logic instead of the Aristotelian or Megarian - Stoic one dominant in our culture therefore in our schools. This behaviour is mainly characterized by the student's need to "anchor" his argumentations to examples and to deductions that, however, take into account, from the very beginning the thesis he wants to reach, as already acquired.

---

[1] Questo testo è già stato oggetto di pubblicazione in lingua spagnola:
D'Amore B. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno*. [Barcellona, Spagna]. 38, 83-99. [Si trova anche negli Atti del *VII Simposio de Educación Matemática: Investigación en Didáctica de la Matemática*. 3-6 maggio 2005, Chivilcoy, Buenos Aires, Argentina. www.edumat.com.ar],
ed in lingua inglese:
D'Amore B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the Learning of Mathemaics*. [Edmonton, Alberta, Canada]. 25 (2), 30-38.
Si ringrazia per il permesso di pubblicazione in italiano la rivista *For the Learning of Mathematics* cui appartengono i diritti.

Sunto. Si introducono le caratteristiche della nyaya, logica che si oppose al buddismo nei primi secoli d. C., fortemente empirica, per mostrare, grazie ad esempi realizzati in classi di prima superiore (età degli allievi 14-15 anni), come talvolta il comportamento argomentativo - dimostrativo di uno studente, in situazione spontanea, sia più empiricamente vicino alla nyaya che non alla logica aristotelica o megarico – stoica, dominanti nella nostra cultura e dunque nella nostra scuola. Questo comportamento è soprattutto caratterizzato dalla necessità che ha lo studente di "ancorare" la propria argomentazione ad esempi e a deduzioni che però tengano presente fin dall'inizio la tesi cui si vuol giungere, come già acquisita.

Resumen. Se introducen las características de la nyaya, lógica que se opone al budismo en los primeros siglos d. C., fuertemente empírica, para mostrar, gracias a ejemplos realizados en clases del primo curso de la escuela superior (edad de los alumnos 14- 15 años), como en ocasiones el comportamiento argumentativo – demostrativo de un estudiante, en situación expontánea, sea más cercano empíricamente a la nyaya que no a la lógica aristótelica o megárica – estóica, dominantes en nuestra cultura y por tanto en nuestra escuela. Este comportamiento es sobretodo caracterizado por la necesidad que el studiante siente de "aferrar" la propia argumentación a ejemplos y a deducciones que tengan presente la tesis a la cual debe llegar, como algo ya adquirido.

Resumé. On introduit les caractéristiques de la "nyaya", logique que s'oppose au bouddhisme dans les premiers siècles a. C., fortement empirique, pour montrer, grâce à des exemples réalisés en classes de premier supérieure (âge des élèves 14-15 ans), comment parfois le comportement argumentatif – démonstratif d'un élève, en situation spontanée, soit empiriquement plus proche à la nyaya que à la logique aristotélique ou mégarique – stoïque, dominante dans notre culture donc dans notre école. Ce comportement est caractérisé surtout par la nécessité que l'élève a de "ancrer" sa propre argumentation à des exemples et à des déductions que toutefois tiennent présent dès le commencement la thèse à la quelle on veux arriver, comment déjà acquise.

0. Premessa

Questo articolo trae origine dalla constatazione di "fallimenti" nei processi dimostrativi da parte di giovani studenti delle scuole superiori, almeno rispetto alle "attese" dei loro insegnanti.

Recentemente, vari Autori hanno contribuito a studiare il complesso fenomeno dell'apprendimento della dimostrazione (si può vedere Balacheff, 2004, che contiene un'importante presentazione delle diverse recenti ricerche in questo settore, con le loro peculiarità). Vi sono in questo campo posizioni anche molto diverse, più formaliste (Duval, 1991, 1993; Duval, Egret, 1993) o quasi empiriste alla Lakatos (Hanna, Janke, 1996). La stessa terminologia è fonte di diverse interpretazioni; "proof" (in inglese) e "demonstration" (in francese) hanno significati diversi, tanto che c'è chi propone di

chiamare in inglese la dimostrazione "mathematical proof". Per tutto ciò, rinvio a Balacheff (2004) ed alla sua bibliografia.
Inoltre, anche se solo riferiti alla geometria, diversi lavori mostrano, per esempio, le enormi difficoltà che incontrano gli studenti nel difficile compito di usare la quantificazione (Durand-Guerrier, 1999). Ma perfino Pascal (1985) si era accorto che nelle dimostrazioni, pur riferendosi a quella che noi oggi chiameremmo una quantificazione, di fatto ci si ancora ad esempi generici.
In tutto ciò, però, resta sempre comune, come quadro logico, il calcolo delle proposizioni ed i primi elementi del calcolo dei predicati del I ordine (Durand-Guerrier, Arsac, 2003).
Osservando a lungo studenti impegnati a dimostrare, come attività personale ma all'interno della classe, dunque, alla fine, come attività sociale, mi sono accorto che, pur nelle molte tipologie di comportamento più o meno spontaneo, teso a soddisfare la richiesta dell'insegnante (cioè una modalità che resta più o meno legata alla logica aristotelica o megarico – stoica), vi era da parte di alcuni studenti una modalità dimostrativa che avrebbe potuto essere studiata in modo diverso da quella attesa dall'insegnante; tale modalità metteva in evidenza alcuni fattori, come il ricorso ad esempi, come l'enunciazione preliminare della tesi etc., che ricorda molto da vicino una logica di tutt'altro genere.
È così nata l'idea di raccogliere testimonianze di applicazione inconsapevole di questa logica, a soli scopi analitici, in questo articolo. In esso, nel paragrafo 1 presento gli elementi di base di tale logica; nei paragrafi 2 – 3 – 4 presento tre "casi" che considero emblematici; nel paragrafo 5 presento alcune riflessioni anche a carattere didattico.
In maniera esplicita voglio mettere in evidenza che qui non si tratta di sostituire una logica ad un'altra nell'educazione scolastica; dall'esperienza fatta e qui narrata, emerge solo il fatto che, per ragionare, gli allievi hanno una tendenza forte ad utilizzare i casi particolari per "leggervi" e "vedervi" il generale; si ha la prova di una dialettica tra la generalizzazione (o astrazione) e la "concretizzazione" della quale dobbiamo necessariamente tener conto durante l'insegnamento.
L'approccio nyaya mostra che altre culture hanno prodotto dei meccanismi intellettuali di generalizzazione e di predicazione del "vero" che sono diversi dalla logica di Aristotele. Per avere riferimenti alla nyaya, si veda, ad esempio, Needham (1959), D'Amore, Matteuzzi (1976) o, più recentemente, Sarma (2005), Sarukkai (2005).

Io non credo, anche dopo questa ricerca, che questi studenti pensino in esatto accordo con la logica nyaya. Il ricorso a questa logica nell'analisi del ragionamento matematico degli studenti evidenzia tuttavia il fatto che l'analisi didattica presuppone, in un modo o nell'altro, una cornice di riferimento e che ci sono diverse cornici logiche possibili per dare una spiegazione del comportamento deduttivo degli studenti. Un interessante risultato di questa ricerca consiste nel fatto che ogni interpretazione della deduzione suppone un quadro logico di riferimento e che i comportamenti devianti sono relativi al quadro che si prende come riferimento.

1. Cenni sulle caratteristiche della scuola filosofica nyaya

Per quanto gli studi delle filosofie orientali non siano contemplati negli usuali programmi di studio nelle scuole europee, credo sia tuttavia piuttosto noto che in India, alla scuola buddista classica, si oppose una dottrina filosofica che, seguendo la denominazione sanscrita, si usa chiamare *nyaya* (che, letteralmente, significa *logica*: è dunque privo di senso dire che la logica di quella scuola fosse la logica nyaya…). Quel che si può subito dire è che, a differenza della filosofia buddista, la nyaya tenne in grande considerazione la speculazione razionale quale base di una coerente dottrina della conoscenza, avvicinandosi a quella che noi oggi chiameremmo logica deduttiva, cui la logica buddista invece rinunciò.

La base della scuola nyaya era di forte carattere empirico, come vedremo, dunque estremamente diversa da quella aristotelica greca che, nel mondo intero, ebbe poi il sopravvento, determinando, tra l'altro, un modo di trattare la dimostrazione in matematica che persiste tuttora (almeno a livello accademico, non certo nella fase del suo apprendimento da parte di giovani studenti).

Tanto per avere qualche parametro di riferimento storico, il principe Gotama (detto appunto "il budda", il risvegliato, l'illuminato) visse nel VI-V sec. a. C., dunque la religione che prende il nome dal suo epiteto si sviluppò nettamente prima dell'aristotelismo in Grecia (III sec. a. C.); mentre il primo testo di filosofia nyaya (il *Nyaya-sutra* di Gautama) è del I sec. d. C. La filosofia si sviluppò nei secoli successivi (con i celebri commentari di Vatsyayana, V sec. d. C.; di Uddoyotakare, del VII-VII sec. d.C.; fino ad una sorta di neo-nyaya, nel XIII sec. d. C., con a capo il filosofo Gangesa).

Negando un principio trascendente dell'universo (il che è peraltro tipico di molte dottrine indiane), la nyaya costruisce una fisica atomistica di stampo realistico, propugnando l'esistenza di nove sostanze primordiali ed un sistema di sedici categorie oggettive

immanenti al reale. La sua gnoseologia era fondata sull'affermazione dell'unità tra la conoscenza puramente sensibile (quella relativa al mondo esterno) e la conoscenza discorsiva (relativa cioè al linguaggio comunicativo, quale che fosse). Si realizza quindi una forma di esistenza nella quale anche i concetti comunicabili sono enti reali.
La scuola nyaya affermava l'egemonia di quattro "mezzi di conoscenza" (pramana):

- la testimonianza
- l'analogia
- la percezione
- l'inferenza

che esaminerò in dettaglio.
La testimonianza (sabda) comprende tutto ciò che di scritto o di tramandato oralmente è degno di fede. Ne fanno parte le preghiere, la rivelazione di Dio, la storia tramandata, i poemi sacri.
L'analogia (upamana; c'è chi la traduce "comparazione" e chi "equivalenza") è la forma di ragionamento che porta ad una definizione dell'oggetto dovuta alla somiglianza con altri. Si noti che l'analogia nyaya classifica gli oggetti in categorie o classi di analoghi, distinguendo due classi tra loro in base al fatto che non hanno termini analoghi. Ora, dato che l'analogia tra oggetti esistenti è dovuta a considerazioni relative all'oggetto (e quindi non astratte, ma classificatorie e sperimentali), questa forma di conoscenza non può non richiamare alla nostra attenzione alcune delle concezioni attuali, anche in matematica. Si pensi in geometria alle definizioni per genere prossimo e differenza specifica o, ancora più evolute, le definizioni cosiddette analitiche che individuano classi per mezzo di un passaggio al quoziente, dunque in base ad una relazione di equivalenza.
La percezione (pratyaska) è la relazione tra l'oggetto visibile (ciò che cade sotto gli occhi) o comunque sensibile (relazione prodotta dal contatto da un organo di senso con l'oggetto) e la nostra immagine di esso. Tralasciamo considerazioni relative ai sei sensi che i filosofi nyaya riconoscevano all'uomo, per ricordare l'importanza che attribuivano al sesto senso, l'intelletto (manas), a causa della funzione ordinatrice e mediatrice che questo "organo" ha, rispetto agli altri cinque.
Ricordiamo che i concetti comunicabili acquistano una loro realtà, nella filosofia nyaya, in contrapposizione alla pura immagine mentale che attribuivano loro i buddisti.
E arriviamo all'inferenza (anumana) che rappresenta, nella scuola nyaya, il momento sublime.

Non è molto conosciuto il cosiddetto *sillogismo* nyaya (lo chiamiamo così come è oramai d'uso per via della sua forma simile, per certi versi, almeno all'apparenza, a quello aristotelico). La nyaya distingueva nel suo sillogismo cinque elementi assertivi (e non tre, come nel sillogismo aristotelico):

- l'asserzione (pratijna) (non dimostrata; è l'enunciazione di quel che si vuol dimostrare)
- la ragione (hetu)
- la proposizione generale o enunciato (udaharana), seguita da un esempio
- l'applicazione (upanaya), detta anche seconda asserzione,
- la conclusione (nigamana).

Il seguente esempio è un classico nyaya (così come lo pseudo sillogismo di Socrate lo è per quella aristotelica):

1. l'oggetto A si muove (asserzione)
2. perché gli è stata applicata una forza (ragione)
3. ogni volta che si applica una forza ad un oggetto, esso si muove (proposizione generale); per esempio: se si attaccano buoi a un carro, esso si muove (esempio)
4. all'oggetto A è stata applicata una forza (applicazione)

dunque

5. l'oggetto A si muove (conclusione).

È abbastanza facile mettere in forma simbolica questo ragionamento; lo facciamo come esercizio.
Prima di procedere introduciamo un opportuno simbolismo; siano:
A, B oggetti dati, X un oggetto generico;
P(X): l'enunciato predicativo aperto "X si muove"
F(X): "a X è applicata una forza".
L'enunciato aperto F(X) è vero ogni volta che, sostituita al posto della variabile X una costante A, F(A) è sperimentalmente verificabile (nel senso: la sua verità cade sotto i sei sensi) (questa, almeno, è l'interpretazione empirista nyaya).
Il sillogismo nyaya si può allora formalmente interpretare come segue:

Asserzione:	1.	$P(A)$	asserzione (non ancora provata)
Ragione:	2.	$F(A)$	causa che si asserisce di P(A)
Tesi:	3.	$(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$	proposizione generale
		esempio: $F(B) \rightarrow P(B)$	esempio

Applicazione:	4.	F(A)	dal caso generale si torna al caso in esame: una forza esercita una azione su A
Conclusione:	5.	P(A)	A si muove

La critica buddista classica rifiuta i momenti primo e secondo, dato che essi non fanno parte del ragionamento vero e proprio, ma sono inglobabili in una tesi.

Tuttavia, quel che voglio evidenziare è che questa apparentemente inutile perdita di tempo si fa spesso nel ragionare comune, per esempio nell'azione didattica: si mette cioè in vista fin dall'inizio quanto si vuol dimostrare alla fine; diversamente non si organizzerebbe proprio *quel* ragionamento. Su questo punto dovremo tornare più avanti.

A torto, comunque, i buddisti rifiutavano il quinto momento, nel quale si compie una sorta di *modus ponens* allargato al calcolo dei predicati, un'operazione logicamente corretta ed essenziale al funzionamento di quel tipo di sillogismo, che potremmo esprimere linguisticamente come segue:

$$\{(\forall X)\,[(F(X)\rightarrow P(X)] \wedge F(X)] \;\rightarrow\; P(X)\} \;\rightarrow$$
$$\{[(F(A)\rightarrow P(A)) \wedge F(A)] \;\rightarrow P(A)\}$$

L'analisi logica della lingua, in relazione alla stretta connessione attribuita alla dicotomia linguaggio-pensato, porta i nyaya a definire un'esatta critica del linguaggio che rasenta sistemi retorici moderni.

Nemici del corretto dedurre o del parlare sono, per i nyaya:

- l'ambiguità (chala) che si realizza ogni volta che un termine viene usato a sproposito (in sostanza, si tratta di un cattivo uso dell'analogia)
- l'inconclusione (jati), discorso circolare senza contenuto
- gli argomenti assurdi (nigrahastama) cui ricorre chi non ha logica; il destino di costui è d'essere dialetticamente sconfitto da chi opera con logica e con argomentazioni razionali.

I filosofi nyaya studiarono poi i casi in cui i loro sillogismi portavano a sofismi; ecco i casi principali di questa deleteria riduzione:

- inesatta rispondenza tra le varie parti costituenti il sillogismo, per cui non c'è relazione tra i termini
- assurdo intrinseco che appare in un termine che afferma il contrario di ciò che vorrebbe asserire
- assurdo esplicito dovuto alla contrapposizione di due termini del sillogismo che si escludono a vicenda

- la mancanza di una dimostrazione o verifica di uno dei termini su cui poggia il ragionamento
- la falsità del termine maggiore o l'inesistenza dell'oggetto in questione[2] o l'attribuzione di false proprietà ad esso.

Da qui si vede bene come la nyaya sia diversa dalla logica aristotelica dato che si basa essenzialmente sulla verifica empirica, sul contatto con il mondo esterno,[3] intendendo per mondo non solo l'insieme delle cose e dei fatti ma pure dei pensati, come fossero entità reali ("reali" non semplicemente "esistenti", per non credere che si possa fare un paragone con il platonismo).

Bisogna qui ricordare che la nostra attuale distinzione tra logica degli enunciati e logica dei predicati non rende giustizia allo sviluppo storico effettivo della disciplina; la logica degli enunciati non è così potentemente presente nell'opera di Aristotele come lo è oggi in qualsiasi trattato: essa deriva dagli studi dei filosofi Megarici e Stoici e, paradossalmente, si è affermata più tardi, mentre la logica dei predicati è essenziale per capire, da un punto di vista moderno, la sillogistica di Aristotele. In aula, nelle lezioni di logica nella scuola media superiore, si tratta soprattutto la logica degli enunciati e si tenta di applicarla, come esempio, alle dimostrazioni geometriche alle quali non sempre e non del tutto essa è adatta. Per esempio, nelle dimostrazioni occorre spesso quantificare su variabili, cosa che non ha senso nella logica enunciativa.

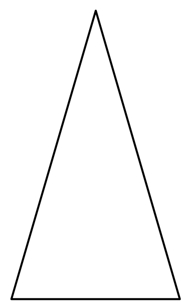
Un'analisi molto approfondita sui modi di ragionamento e sulle loro modellizzazioni logiche da parte di esperti (matematici, docenti universitari) e da parte di studenti (universitari, ai primi anni) è quella condotta da Durand-Guerrier e Arsac (2003). Gli Autori mostrano, tra l'altro, concezioni diverse dell'uso e della necessità d'uso dei quantificatori nelle dimostrazioni da parte degli esperti e da parte degli studenti.

2. Argomentazioni e dimostrazioni in aula: il caso di Filippo

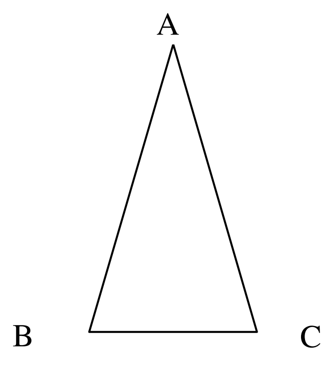
[2] Su questo punto, si ricordi la posizione di Aristotele nei confronti dell'insieme vuoto ed il superamento della questione da parte di Gergonne (D'Amore, 2001, 17-54).

[3] Il che non solo non era contemplato, ma del tutto inviso alla filosofia greca trionfante (Socrate-Platone-Aristotele) che, su questo punto, in modo più o meno esplicito, proseguiva nel ripudiare la *doxa* a favore della scelta parmenidea della *aletheia*. Naturalmente, discorso a parte meriterebbero i tentativi dei Sofisti che, però, furono soggiogati dal trionfo di Aristotele e dalle (precedenti) argomentazioni dialogiche di Platone.

Per diversi motivi, i tre esempi che mostrerò non sempre sono *perfettamente* assimilabili alla logica nyaya, ma molto molto vicini ad essa; risulta però interessante, a mio avviso, prendere in considerazione l'idea di studiare la logica nella quale gli studenti affrontano la dimostrazione perché questo potrebbe avvenire con logiche diverse da quella aristotelica. Questo è quel che accade nei seguenti tre esempi.
Quel che voglio evidenziare, per cominciare, è il ragionamento di Filippo, un allievo di 14 anni (I superiore), che affronta il seguente compito (tale compito è scritto su un foglio che viene dato a Filippo):
«Dimostrare che se in un triangolo vi sono due lati congruenti, allora vi sono anche due angoli congruenti».
Filippo viene registrato (quel che fa è aggiunto da me stesso).
Filippo disegna un triangolo scaleno, poi lo cancella. Dopo di che disegna un triangolo isoscele con il lato diverso dagli altri due come base, cioè parallelo al lato corto del foglio più vicino a sé:



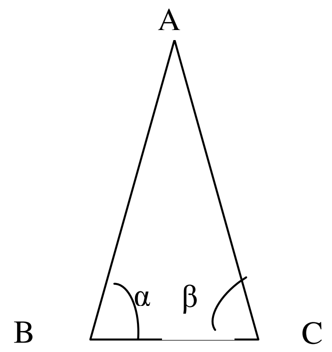
A quel punto Filippo mette delle lettere sui vertici:



Nel fare ciò, si sente un suono che esce dalla sua bocca, come se si stesse concentrando; ma non sono parole.
A quel punto guarda il ricercatore e gli chiede:
F: - Ci devo mettere gli angoli?

R: - In che senso?
F: - Ce li devo scrivere?
È chiaro quel che intende dire, ma il R. fa finta di non capire:
R: - Fa quel che credi giusto.

Filippo allora aggiunge alla figura la denominazione degli angoli alla base:



F. guarda soddisfatto il ricercatore, cercando approvazione.
R: - Vai pure avanti.
Filippo legge attentamente il foglio sul quale compare il testo del compito propostogli e, di quando in quando, guarda il proprio disegno. Poi esclama:
F: - Alfa è uguale a beta. Ecco sì, alfa [e lo indica con la punta della matita] è uguale a beta [idem].
Poi guarda il ricercatore.
R: - È quel che vuoi dimostrare o è quello da cui parti?
Filippo tace, rilegge, guarda la figura, rilegge ancora e dice:
F.: - No, no, non parto da qui, questo è quel che mi chiede lei.
R.: - Dunque?
F.: - Io so che AB è uguale a AC; qui [e indica i due lati con la punta della matita sulla sua figura, facendo scorrere minuziosamente la punta su entrambi i lati]. Questi due qui sono uguali.
Il ricercatore tace.
F.: - Ma se questi due [e indica i lati, però solo toccandoli ciascuno con la matita in un punto al loro interno] sono uguali, per forza anche questi qui [idem con gli angoli], gli angoli insomma sono uguali.
R.: - Ah sì?
F. – Come no?, per forza, se AB è 3 e AC è 3, allora alfa e beta saranno, che so, 60.
R.: -Perché 60 gradi? Non potrebbero essere 40 gradi?

F.: - Sì, credo di sì. Mi è venuto 60 gradi, ma credo che potrebbe essere qualsiasi [intende dire ampiezza].
Filippo guarda il ricercatore come se il compito fosse finito.
R.: - Allora? Possiamo concludere il compito? Che cosa puoi affermare?
F. : - Io credo che tutte le volte che i lati sono uguali, allora anche questi due angoli qua, quelli di sotto [e tocca con la punta della matita i due angoli] devono essere per forza uguali. Quindi, mah, io credo che sia così, che ho detto bene. I due lati qui del triangolo [e tocca l'interno del triangolo] sono senz'altro uguali e quindi anche gli angoli, no?

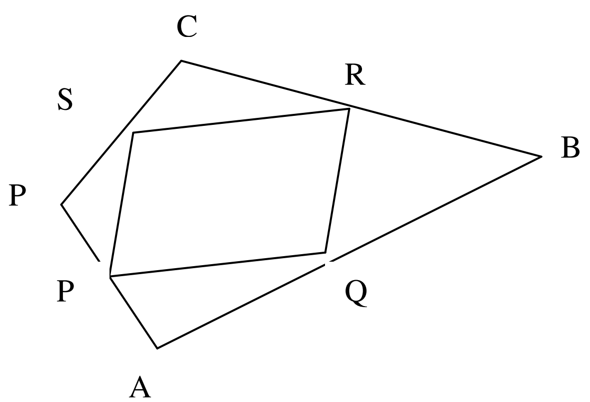
Se esaminiamo il comportamento argomentativo – dimostrativo di Filippo, si rivelano quasi esattamente le fasi previste dai filosofi nyaya:

1.	Alfa è uguale a beta. Ecco sì, alfa è uguale a beta.	P(A)
2.	Io so che AB è uguale a AC; qui. Questi due sono uguali.	F(A)
3.	Ma se questi due sono uguali, per forza anche questi qui, gli angoli insomma sono uguali.	$(\forall X)[F(X) \rightarrow P(X)]$
	Se AB è 3 e AC è 3, allora alfa e beta saranno, che so, 60.	Esempio
4.	I due lati qui del triangolo sono senz'altro uguali	F(A)
5.	e quindi anche gli angoli [sono uguali]	P(A)

In effetti, Filippo NON ha dimostrato affatto il teorema che gli veniva proposto, ma ha argomentato come se la implicazione ($AB=AC \rightarrow \alpha=\beta$) fosse scontata. Ma qui non stiamo esaminando la correttezza dello svolgimento del compito; qui stiamo esaminando il comportamento *spontaneo* di Filippo di fronte al compito. La sua principale preoccupazione non è quella di condurre la dimostrazione euclidea, ma di convincere (sé stesso o il ricercatore) che davvero le cose stanno com'è scritto sul foglietto-compito.
A dir la verità, Filippo è solo un esempio tratto da una decina di interviste tese a verificare questa idea: *che il comportamento argomentativo - dimostrativo di uno studente, in situazione spontanea,*

è a volte più empiricamente vicino alla nyaya che non alla logica aristotelica o megarico-stoica.
Tra tutti gli studenti (quindicenni o sedicenni) intervistati, Filippo costituisce uno dei casi più eclatanti perché, a mio avviso, percorre proprio tutte le tappe nyaya; ma molti altri studenti tendono a comportarsi così, anche se i più scolarizzati (D'Amore, 1999) sono meno propensi a lasciarsi andare in modo spontaneo e cercano, almeno all'inizio, in qualche modo, di prolungare i lati AB e AC, di disegnare segmenti etc., come probabilmente ricordano di aver visto o di aver fatto. Molti, però, in maniera più o meno lampante e riconoscibile, seguono i passi nyaya, cercando l'esempio al III passo, fosse anche solo figurale, anche senza esplicitare misure, come fa Filippo.
Vedremo nei prossimi paragrafi altri due esempi.

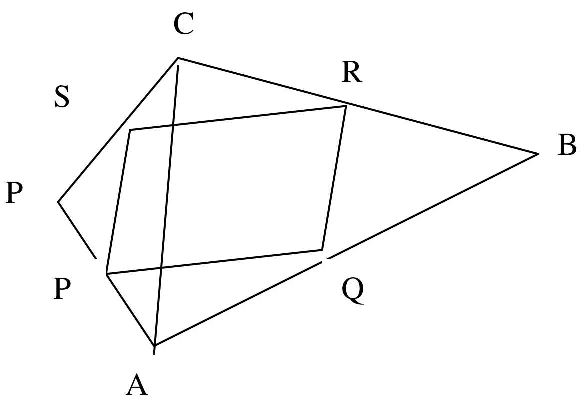
3. L'esempio "doppio" di Giada
Giada frequenta la I superiore, ha 15 anni ed è dichiarata dall'insegnante "molto portata" per la matematica. La dimostrazione che le propongo è la seguente (che trovo sul suo libro di testo tra gli esercizi): «Dato il quadrilatero ABCD, siano PQRS i punti medi dei suoi lati; si congiungano tali punti; si dimostri che il quadrilatero così ottenuto è un parallelogramma».
Giada esegue questo disegno a matita su un foglio bianco:



G.: - Ecco, questo.
R.: - Sì?
G.: - L'ho fatto male.
R: - No, no, va bene, si capisce bene.
Giada rilegge il testo.

G.: - Allora, PQRS deve essere un parallelogrammo… [sul libro di testo è scritto “parallelogramma”, ma Giada userà sempre “parallelogrammo”, forse perché usato in aula].
Istanti di silenzio, poi:
G.: - … sì, perché [e scrive sul foglio, pronunciando contemporaneamente ad alta voce] PQ//RS e PS//QR. Sì. [Guarda l’intervistatore].
R.: - Ah.
G.: - Sì, no, è così. Quando i lati del quadrato [ma intende dire quadrilatero] sono paralleli a due a due, allora il quadrato [ma intende dire quadrilatero] è un parallelogrammo. [Guarda l’intervistatore, poi il proprio disegno].
Giada si mette la matita in bocca, poi disegna quel che segue:

dicendo contemporaneamente:
G.: - Ecco, per esempio, questo ha i lati paralleli a due a due [e tocca con la punta della matita a due a due i lati opposti].
R.: - Ecco.
G.: - Nel nostro caso è così perché PS è parallelo a QR e anche PQ a PS, no a SR.
Silenzio.
G.: - Dunque è vero: PQRS è proprio un parallelogrammo. [Guarda l’intervistatore, ma con qualche dubbio].
R.: - Sì, ma come fai a dire che PQ è parallelo a RS?
Giada guarda il disegno iniziale:
G.: - Ah, òh, devo far vedere che PQ è [questa prima parte è in tono affermativo, poi cambia in tono interrogativo] …parallelo a RS? Sì, paralleli, PQ parallelo a RS.
Si ferma un po’ a riflettere.
G.: - Beh, perché tutti e due forse perché sono credo paralleli ad AC [e traccia AC sulla prima figura, quella iniziale].



G.: - Sì, perché, lo so, mi ricordo, perché c'è il triangolo ACD e così S e P sono quei punti medi. Si vede.
R.: - Bene. Dunque?
G.: - [Sembra citare a memoria una frase fatta] Se due linee [ma vuol dire rette] sono parallele ad una stessa linea, allora sono parallele anche loro. Si vede anche qui [con la punta della matita ripassa SP, RQ e CA].
R.: - Ah.
G. - Sì. [Riflette]. Beh, uguale si ha anche per gli altri due [intende dire che un ragionamento analogo si piò ripetere per RS e PQ rispetto a BD].
R.: - Quali?
[Giada in silenzio passa sopra i tre segmenti RS, PQ e BD].
G.: - Sì sono tutti paralleli. SP, RQ, AC e poi SR, PQ, BD. Ma anche… Ecco! Era così la tesi, no?

Ho chiamato "doppio" l'esempio di Giada perché, a mio parere, nell'elaborato di Giada il modello nyaya si presenta due volte.
Nella prima parte:

1.	PQRS deve essere un parallelogrammo	P(A)
2.	perché PQ//RS e PS//QR. Sì.	F(A)
3.	Quando i lati del quadrato [quadrilatero] sono paralleli a due a due allora il quadrato [idem] è un parallelogrammo	$(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$
	Ecco, per esempio [disegno di un rettangolo, che vorrebbe essere un parallelogramma generico]	Esempio
4.	Nel nostro caso è così perché PS è parallelo a QR e anche PQ a (…) SR	F(A)
5.	Dunque è vero: PQRS è proprio un parallelogrammo	P(A)

Ma poi l'intervistatore chiede ragione dell'affermazione PQ//RS; e qui inizia la seconda parte:

1. devo far vedere che PQ è parallelo a

	RS; sì, paralleli, PQ parallelo a RS	P(A)
2.	perché tutti e due forse perché sono credo paralleli ad AC. Sì, (…) perché c’è il triangolo ACD e così S e P sono quei punti medi.	F(A)
3.	Se due linee [rette] sono parallele a una stessa línea [retta] allora sono parallele anche loro.	$(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$
	Si vede anche qui.	Esempio
4.	uguale si ha anche per gli altri due. (…) Sì, sono tutti paralleli SP, RQ, AC e poi SR, PQ, BD.	F(A)
5.	Ma anche… Ecco! Era così la tesi, no?	P(A)

Al di là di usi impropri di termini, Giada dimostra davvero una certa qual padronanza della matematica; si sa che nella versione orale del linguaggio è facile dire una cosa per l’altra (“quadrato” invece di “quadrilatero”, “linea” invece di “retta”), ma ciò non pregiudica il giudizio sulla sua azione: Giada assolve bene al compito con una conduzione argomentativa facilmente ascrivibile ad un comportamento nyaya.

4. L’esempio di Pitto.

“Pitto” è il nomignolo con il quale tutti in aula chiamano Pietro (anche l’insegnante), uno degli studenti più popolari di una I superiore, 15 anni compiuti.
A tutta la classe è proposto il seguente compito: «La somma di tre numeri naturali consecutivi è senz’altro divisibile per 3» un classico facile esercizio che mette però in campo varie strategie.
Non racconto l’esperienza visto che il mio scopo è preciso, anche se vi sono stati risultati di grande interesse; inutile dire che, come conferma la ben nota letteratura di ricerca sull’argomento, moltissimi studenti si limitano a dare esempi [tra i quali appare un -1+0+1, curioso, ma non aderente alla richiesta di usare numeri naturali; tale esempio ha sollevato l’ovvio eterno problema di decidere se 0 sia o no divisibile per 3]. Ma non voglio andare fuori tema.
In particolare, tra le interviste, tutte molto interessanti, spicca quella di Pitto che sembra fare al caso nostro.
Pitto scrive dapprima $a+b+c$ e guarda il ricercatore.
P.: - Devo fare la somma…
R.: - Di che cosa?
P.: - Eh. Di tre numeri naturali.

R.:- Qualsiasi?
P.: - Sì.
R.: - Sicuro? Leggi bene.
P.: - Consecutivi. Come, non so, 5, 6, 7, così? [Scrive staccati 5 6 7].
R.: - Sì; come sono fatti tre numeri consecutivi; prova a pensarci in generale… Come lo chiami un numero, in generale?
P.: - Ah, sì, n. Sarebbe come dire [e intanto scrive]: n poi $n+1$ e poi $n+2$.
Si ferma e scrive la somma: $n+(n+1)+(n+2)$ esattamente così, con le parentesi giuste.
R.: - Ah sì, così va bene. Dunque?
P.: - [Rilegge il testo] Dunque questo [e indica $n+(n+1)+(n+2)$] è divisibile per 3. Beh 5 più 6 più 7 [e mette i segni + tra 5 e 6 e tra 6 e 7 nella scrittura precedente] che fa 11 e 7, 18. [Prosegue scrivendo = 18]. Che 18 è divisibile per 3. Perché esiste un t tale che $n+(n+1)+(n+2)$ è $3t$ come prima che t è 6.
Pitto guarda l'intervistatore che fa un cenno di assenso.
P.: - Se trovo t ogni volta allora sarebbe [e riscrive tutto daccapo] $n+(n+1)+(n+2)=3t$ e quindi è sempre [tocca con la punta della penna il primo membro di questa uguaglianza] n più $n+1$ più $n+2$ divisibile per 3. Per esempio 1 più 2 più 3 è con t uguale a 2.
R.: - Bene. Molto bene. Allora come fai a dimostrare quel che vuoi?
Pitto riscrive, ancora una volta, $n+(n+1)+(n+2)$ e poi cerca di eseguire trasformazioni di trattamento semiotico. Inutile dire che prima scrive n^2+1 perché lui stesso si corregge pronunciando un “No” secco e cancellando accuratamente questo tentativo. Poi scrive $2n+1+n+2$ e dice:
P.: - … che fa $3n+3$. Ecco qui c'è il 3.
E scrive “$= 3(n+1)$”.
Mentre con la punta della penna colpisce il 3, guarda l'intervistatore.
R.: - Bene, ci siamo dunque.
P.: - Eh sì, sì.
Sul foglio, a partire dall'$(n+1)$ che appare a secondo membro dell'uguaglianza, scrive un $= t$ un po' di traverso.
Pitto è soddisfatto e commenta:
P.: - Ah, è stata bella, ve' qui. [Tocca con la punta della penna l'ultima uguaglianza e dice] È sempre 3 per quello in mezzo.

Esaminiamo il comportamento di Pitto la cui argomentazione è senz'altro riconducibile ad un comportamento nyaya.

1.	$n+(n+1)+(n+2)$ è divisibile per 3	P(A)
	5+6+7 che fa (…) 18. Che 18	

	è divisibile per 3	Esempio di P(A)
2.	Perché esiste un t tale che	
	$n+(n+1)+(n+2)$ è $3t$	F(A)
	come prima che t è 6	Esempio di F(A)
3.	Se trovo t ogni volta allora sarebbe	
	$n+(n+1)+(n+2)=3t$ e quindi è	
	sempre $n+(n+1)+(n+2)$ divisibile per 3	$(\forall X)\ [F(X)\rightarrow P(X)]$
	Per esempio 1+2+3 è con t=2	Esempio
4.	$[n+(n+1)+(n+2)]$ che fa	
	$3n+3\ (\ldots) = 3(n+1)\ [= 3t]$	F(A)
5.	È sempre 3 per quello in mezzo $[3(n+1)]$	P(A)

In questa argomentazione riassunta in modo schematico si vede bene come Pitto senta il bisogno di "ancorare" ancora di più il suo ragionamento; gli esempi, tipici del ragionamento nyaya ed invisi invece a quello aristotelico o megarico – stoico, appaiono non solo per giustificare il passaggio 3, ma anche 1 e 2. Questo dà sicurezza a Pitto e lo fa procedere verso una corretta impostazione della propria buona argomentazione.

5. Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro è solo quello di mostrare come il comportamento dimostrativo o, più in generale, argomentativo di studenti abbastanza evoluti non sia sempre e solo legato alle tipologie aristotelica e megarico – stoica, come la storia e la tradizione spingono a credere.

L'uso di uno schema quanto meno analogo a quello nyaya seguito da questi allievi non significa che essi non facciano una dimostrazione, ma solo che essi non la fanno seguendo uno schema aristotelico; alcuni di essi fanno davvero una dimostrazione (Pitto), altri non del tutto (Filippo), ma quel che interessa rilevare è l'esistenza comune dei passi 1 e 2 che danno senso all'enunciato generale quantificato (tesi). Ci si potrebbe chiedere se il ruolo di tali passi 1 e 2 presso gli studenti è davvero lo stesso che aveva nella nyaya o se si tratta solo di "ancoraggi" agli esempi, dunque un'applicazione dell'enunciato generale a casi specifici. Ora che abbiamo evidenziato questo modello logico per interpretare un comportamento che troppo sbrigativamente potrebbe essere considerato errato (perché non aderente ad un altro modello più accreditato), potremo spingerci oltre nell'analisi.

Per ora possiamo limitarci a delle riflessioni, quelle seguenti, che sembrano avere qualche interesse didattico.

Questo studio mostra almeno una cosa, che l'aderenza alla logica aristotelica come modello della dimostrazione naturale, non è così scontata e, comunque, non è unica. Qui non si vuole affatto sostituire l'una logica con l'altra, ma aprire l'analisi dell'apprendimento della dimostrazione anche ad altri schemi possibili.
Infatti, condividiamo l'idea generale di Luis Radford (Radford, 1999, 2004) secondo la quale la forma del pensiero di una cultura deve pagare un tributo alle attività che effettuano coloro che ne fanno parte, dato che è l'attività umana che genera i saperi. Piuttosto che porre una logica a modello del funzionamento del pensiero umano, è preferibile analizzare le attività socioculturali e vedere come questo pensiero si forma in quanto riflessione di quel che fanno gli individui nel corso delle proprie attività.
Scendendo in un'analisi più squisitamente metodologica tratta dai casi evidenziati dai soggetti studiati, i passaggi da più casi particolari alla quantificazione universale si presenta come interpretazione esagerata e comunque essa non è spontanea come attività del soggetto. Quando Filippo, per esempio, parla di "questi due", egli fa certamente riferimento a due casi particolari e la generalizzazione che noi vediamo nelle sue parole probabilmente gli deriva da un'attività di analisi dei casi e non da un processo di generalizzazione. Ma proprio questo fatto rafforza l'idea di un'aderenza pragmatica più alla logica nyaya che a quella predicativa del I ordine.
Infine, in termini semiotici, ci sono passaggi a livello della denotazione (comuni ai comportamenti di tutti i soggetti esaminati) che i soggetti stessi non hanno preso in esame in modo esplicito, tanto che il fatto di formulare affermazioni nella logica predicativa con quantificatori potrebbe avvenire a loro stessa insaputa. Questo tipo di riflessione richiede ulteriori studi, per esempio coinvolgendo gli studenti nell'analisi della loro stessa strategia dimostrativa.

Da un punto di vista didattico, da un lato riceviamo la spinta a ridimensionare l'idea che l'unico modello dimostrativo sia quello enunciativo – predicativo aristotelico, dall'altro a fornire strumenti per un'analisi delle attività socioculturali compartite in aula.
Di tutto ciò non si può non tener conto nell'azione didattica, quando lo scopo è il controllo delle competenze argomentative e dimostrative raggiunte dagli studenti nel corso della scuola superiore.

Bibliografia

Balacheff N. (2004). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz*. 109. http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers.

D'Amore B., Matteuzzi M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.

D'Amore B. (1999). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (2001). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.

Durand-Guerrier V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit X*. 50, 57-79.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003). Méthodes de raisonnement et leur modélisations logiques. Spécificité de l'Analyse. Quelles implications didactiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 23, 3, 295-342.

Duval R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demontration. *Educational studies in mathematics*. 14, 385-414. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 1, 1996, 4-32].

Duval R. (1992-93). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*. 31, 37-61. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 2, 1996, 130-152; appare anche come primo volume nella collana Bologna-Quéretaro, Bologna: Pitagora].

Duval R., Egret M.A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repère*. 12, 114-140.

Hanna G., Janke N. (1996). Proof and proving. In: Bishop A. et al. (eds.) (1996). *International handbook of mathematics education*. (877-908). Dordrecht: Kluwer.

Needham J. (1959). *Science and Civilisation in China*. Volume 3. Cambridge: Cambridge University Press.

Pascal B. (1985). *De l'Esprit Géométrique*. A cura di A. Clair. Paris: Flammarion.

Radford L. (1999). La razón desnaturalizada. Ensayo de epistemología antropológica. *Relime*. 2, 3, 47-68.

Radford L. (2004). The Anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*. In corso di stampa.

Sarma V.V.S. (2005). Indian Systems of Logic (*Nyaya*): a survey. IIT Bombay Logic Conference. VVSSarma_Tutorial.pdf.

Sarukkai S. (2005). Indian logic and philosophy of science: the logic-epistemology link. SundarSarukkay_PlenaryTalk.pdf.

L'autore ringrazia i colleghi ed amici Giorgio Bagni, Colette Laborde, David Pimm Luis Radford per la lettura critica fatta a precedenti versioni di questo articolo e per i suggerimenti forniti.